Rob van Oord
Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 29ste Nationale Wiskunde Dagen

De geofractor komt om de hoek

Op vrijdag en zaterdag 14 en 15 april vonden voor de 29ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats, in de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout. Rob van Oord was er weer bij.

Shortcut

Op 14 en 15 april 2023 kwamen ruim 800 wiskundedocenten, een recordaantal, naar Noordwijkerhout om samen het feest van wiskunde te vieren. Met drie big shoppers vol modellen en papier wurmde ik mij door de menigte die in een lange rij voor de incheckbalie stond. Vanuit de rij klonk blij en luidkeels: “Hé Rob, wat goed dat ik je zie.” Oud-collega Antoon had ik al jaren niet meer gezien. Hij is nu weer terug vanuit China en geeft les in Dordrecht. Voor deze sfeer van vrienden kom ik ook graag naar de NWD.

In de opening van de NWD liet Irma Cornelisse van het CvTE een menselijk gezicht zien van wat voor velen van ons slechts een instantie is die ons (de vaak vermaledijde) examens verstrekt. Er zitten wel degelijk op veel plaatsen in het proces wiskundecollega’s. Ze maakte duidelijk dat het grote voordeel van centrale examens is dat je voor vervolgopleidingen niet weer allerlei aparte toelatingen hoeft te doen, zoals in de ons omringende landen wel vaak het geval is.

De beurt aan Marcus du Sautoy, een Britse getaltheoreticus aan Oxford University, die een pleidooi hield voor minder oefeningen en dril en meer shortcuts in het zoeken naar oplossingen van gestelde problemen. Eerst denken dan doen. Zo was Gauss ooit snel klaar met zijn strafwerk. Hij moest de getallen van 1 t/m 100 optellen. In gedachte zette hij de rij 1 t/m 100 in omgekeerde volgorde onder de gewone rij. Hij zag dat je dan bij optellen 100 keer 101 krijgt. Dus het antwoord van zijn strafwerk was $100\times 101/2=5050$.

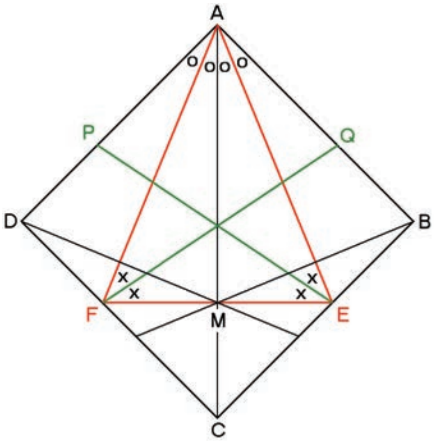
In de natuur zie je dat bijen vanuit zichzelf een shortcut gebruiken voor het maken van cellen van was. Ze hadden vierkante of driehoekige cellen kunnen maken, maar een honingraat bestaat uit zeshoekige cellen. Voor het bouwen van dit patroon is de minste energie nodig. In de praktijk van pretparken wordt de omgekeerde cycloïde gebruikt om een baan van de top naar een laagste punt verderop in de achtbaan te maken waar je op de snelst mogelijke manier heen kunt. Mooie bijkomstigheid is dat het niet uitmaakt waar je op de kromme begint met dalen. Vanaf elk punt van de kromme duurt het even lang om in het laagste punt te komen. Dus geen geduw en getrek van de wagentjes. Of toch wel, een beetje.

In de pauze kon ieder die dat wilde een gesigneerd exemplaar aanschaffen van het naar het Nederlands vertaalde boek: *Beter denken, de kunst van de shortcut* [2].

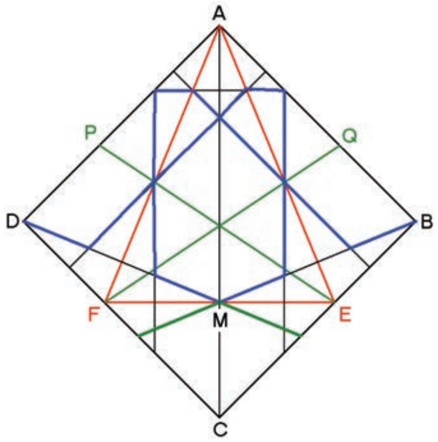
Islamitische patroonkunde

Een aantal jaar geleden werkte ik als invaller op het Alfrinkcollege in Zoetermeer. Daar begeleidde ik onder andere een klas 5 vwo wiskunde C met drie leerlingen. Als praktische opdracht moesten de leerlingen een lessenserie doorwerken, ontworpen door Goossen Karssenberg en Marjanne Klom, over islamitische patronen. Fascinerend hoe zij (wij) met potlood en liniaal ontdekten welke achterliggende patronen horen bij de mooie tegelfiguren die we van moskeeën kennen. Geïnspireerd door professor Jan Hogendijk heeft Goossen sinds 2008 tal van workshops gegeven aan scholieren en studenten in Isfahan, Istanbul en in Nederland. Gelukkig heeft hij een jaar geleden besloten de manier van werken van deze kunstenaars, of moet je misschien zeggen ambachtslieden, en de achtergronden van veel patronen in een Zebra-boekje neer te schrijven. Over dit boekje, dat net is verschenen [4], gaf Goossen een workshop op de NWD. In de workshop vertelde Goossen over zijn zoektocht en ontdekkingen. Als redacteur van de Zebra-reeks beleefde ik al mooie momenten bij het lezen van zijn manuscript. Ik probeerde al tekenend achter de bedoeling te komen van de ‘kansen’ om te doen wat hij voorstelt. Even verderop bespreek ik van een tegeltableau [4, p. 10] hoe die mogelijk ontworpen is. Veelal gaat het om precies en nauwkeurig de instructies te volgen, meer nog dan het bewijs of de figuren exact zijn.

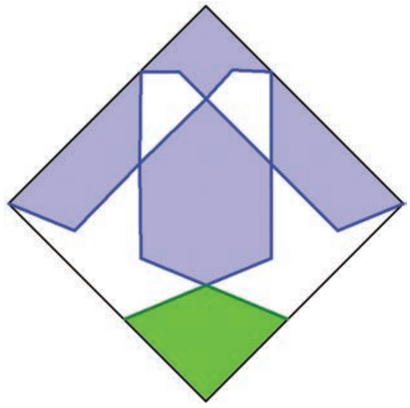
Omdat de hoeken van veelhoeken beter in delen van een hele toer van 360° zijn uit te drukken heeft Goossen een speciale hoekenmeter ontworpen. Niet in graden maar in delen van toeren. In graden is een hoek van $\frac{1}{7}$ toer niet zo eenvoudig te meten, of te tekenen. Op de zogenaamde geofractor vind je dan ook geen graden, maar wel getallen als $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ $(=60^\circ)$, $\frac{1}{7},\dots,$ $\frac{1}{10}$ $(=36^\circ)$, $\frac{2}{9}$, enzovoort, alle $<\frac{1}{4}$ toer $(=90^\circ)$. Er zijn maar heel weinig manuscripten te vinden waarin wordt uitgelegd hoe de patronen ontworpen zijn. Het ging voornamelijk via mondelinge overlevering. Om achter de onderliggende patronen van mozaïeken te komen is het meten met de geofractor van onschatbare waarde. Het is de kunst om een onderliggende kleinste cel te vinden. Als je die eenmaal hebt, kun je door spiegelen, draaien en schuiven het patroon uitbreiden naar het gehele vlak. In het patroon zoek je naar symmetrieassen en punten, zowel lokaal als voor het hele patroon. Vaak ontstaat dan een vierkant (kleinste cel). Ik laat



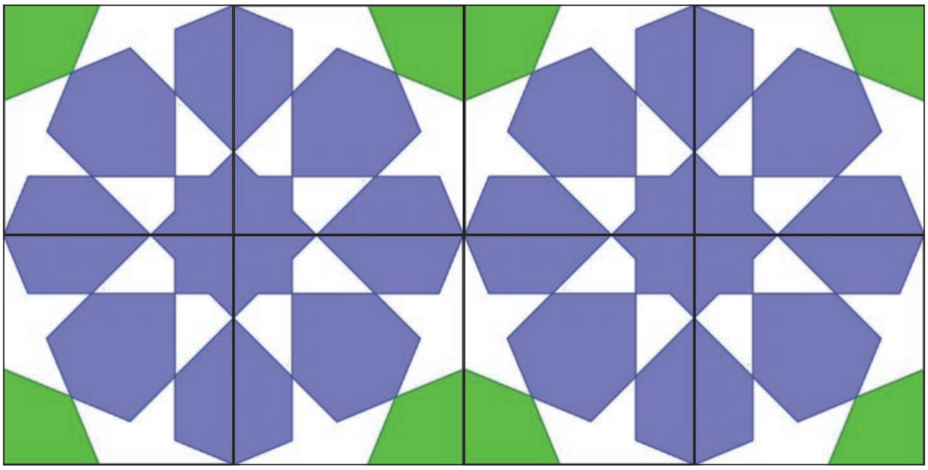
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3 Patroon van één cel.



Figuur 4 Acht cellen met hetzelfde patroon, gedraaid en gespiegeld.

eerst zien welk patroon we in de workshop getekend (gevouwen) hebben. Zie ook *Pythagoras* 59-1, september, 2019, Figuur 6C. Daarna behandel ik een patroon uit het Zebra-boekje. Zie [4, p. 16].

We zetten eerst een vierkant ABCD op zijn punt, met toppunt A. We tekenen (vouwen) de verticale diagonaal AC met twee bissectrices AE en AF (rood) van de halve tophoeken BAC en DAC. Vervolgens de basis EF (rood) van de gelijkbenige driehoek AEF, met hoeken van $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{16}$ en $\frac{3}{16}$ toer. Teken (vouw) de bissectrices EP en FQ (groen) van de hoeken AEF en AFE. M is het midden van EF. Teken (vouw) de lijnen BM en DM. Zie Figuur 1. Teken lijnen m // AC en n // AC door de snijpunten van EP en AF, en van FQ en AE. Teken lijn j // AB door het snijpunt van AE en m, en lijn k // AD door het snijpunt van AF en n. Maak nu lijnstukken blauw (en groen) om (halve) zeshoeken, vliegers en sterpunten te accentueren. Zie Figuur 2.

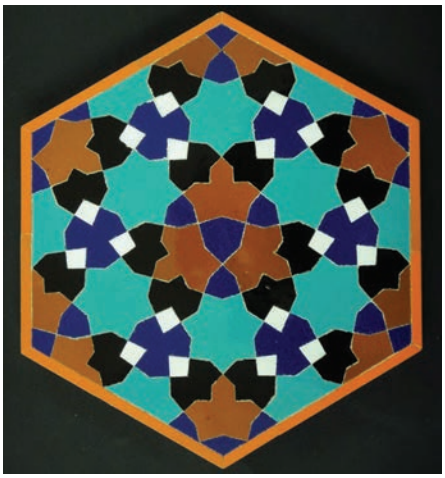
In een blog op de site van de NVvW schreef Henk Hietbrink over een variant van dit patroon [3].

Patroon met strikjes (uit Zebra 66)

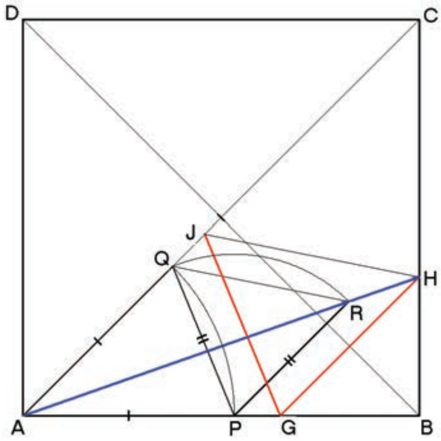
In het volgende voorbeeld komen er vierkante cellen met (rode) 'strikjes' tevoorschijn. De strikjes vormen de achtergrond van de cel met (blauwe) vliegers. Op p. 40 van Zebra 66 staat hoe je die strikjes kunt tekenen [4]. Maar omdat je bij deze beschrijving buiten de cel moet tekenen geef ik een iets andere versie. Die komt wel op hetzelfde patroon uit. Via een vernuftige constructie van gelijkvormige driehoeken, die kennelijk al in die tijd bekend moet zijn geweest, wordt een punt G op AB geconstrueerd zodat tegelijkertijd een punt H op BC en een punt J op AC komen te liggen waarbij driehoek GHJ gelijkbenig is met GH $=$ GJ én $\angle$HGJ $=\frac{3}{16}$ toer.

Neem een vierkant blaadje ABCD (uit een A4). Vouw beide diagonalen. Teken een gelijkbenige (hulp)driehoek APQ met tophoek A en opstaande zijden PA (P op AB) en QA (Q op AC) met lengte PA en QA ongeveer $\frac{1}{2}$AB. $\triangle$APQ is dus gelijkbenig met tophoek A van $\frac{1}{8}$ toer $(=45^\circ)$ en basishoeken APQ en AQP van $\frac{3}{16}$ toer. Teken door P een lijn m // AC. Teken op m punt R zodat PR $=$ PQ. Nu is $\angle$RPB $=\frac{1}{8}$ toer $(=45^\circ)$ en $\angle$RPQ $=\frac{3}{16}$ toer. Teken lijn AR door tot punt H op BC. Hiermee vergroot je $\triangle$PQR tot een driehoek (GHJ) met de gewenste eis dat de 'opgeplakte' driehoek (GHJ) gelijkbenig is met punt G op BC. Dit gaat dan zo. Teken punt G op AB zodat GH // AC. Teken punt J op AC met GJ // PQ. Nu is $\triangle$PQR $\sim$ $\triangle$GJH. Dus ook geldt dat GJ $=$ GH en $\angle$HGJ $=\frac{3}{16}$ toer. Zie Figuur 6. Teken het spiegelbeeld van GJ bij spiegelen in diagonaal BD en het halve strikje is af. Maak het strikje compleet door de getekende helft te spiegelen in diagonaal AC. Zie Figuur 7. Tot slot moeten nog de vliegers binnen het strikje getekend worden. Drie hoekpunten worden gevormd door de middens K van GJ, L van GH en M van HJ. Nu is $\angle$KLM $=\frac{3}{16}$ toer (ga dit zelf na). Teken de top N van de vlieger zodat $\angle$NKL $=$ $\angle$NML $=\frac{3}{16}$ toer. Zie Figuur 7. Teken de overige vijf (blauwe) vliegers erbij. Zie Figuur 8.

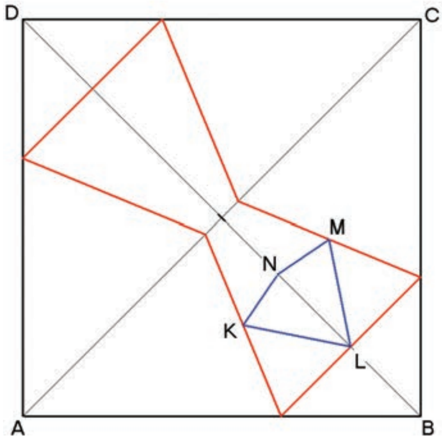
In 2017 maakte Goossen met zijn dochter Maite een reis naar Isfahan. Over dit



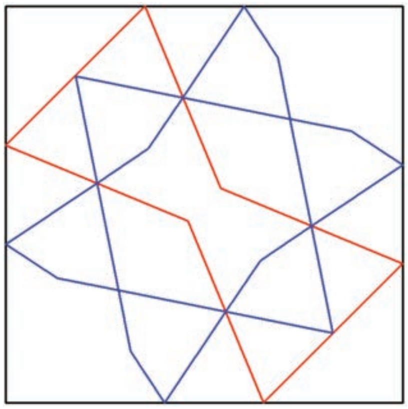
Figuur 5 Ontwerp van Goossen Karssenberg.



Figuur 6



Figuur 7



Figuur 8 Patroon van één cel.

avontuur schreef zij het boekje *Snijpunt Isfahan* [5]. Daar werd door een bekende tegelmaker van een nog niet eerder vertoond patroon, ontworpen door Goossen, een echt tegeltableau gemaakt. Zie Figuur 5. Het is wel toevallig dat tegelpatronen ook actueel zijn in het nieuws. Op 30 maart 2023 verscheen een bericht dat wiskundigen van de universiteit van Arkansas een zogenaamde 'einstein'-tegel, genaamd 'de hoed', gevonden hebben die het vlak aperiodiek bedekt, dat wil zeggen dat het patroon zich nergens herhaalt. In de pauze kon ieder die dat wilde spelen met een set van deze tegels. Ze zijn op internet te bestellen. In de jaren zeventig werd Penrose al beroemd door zijn sets van twee tegels die het vlak aperiodiek kunnen bedekken. Deze tegels komen uit de gulden snede-driehoek. De hoeken zijn veelvouden van 36°.

Heel veel kubussen

Na de pauze ontvingen Marjan Botke en ik de 55 deelnemers van onze workshop. Eerst gaven we wat voorbeelden van waar je kubussen tegenkomt, zoals dobbelstenen, kubuswoningen, puzzels, straatornamenten. Daarna kwamen we met wat mooie vragen die je bij een kubus kunt stellen. Uitgaande van een dobbelsteen (hoeveel verschillende zijn er eigenlijk?) waarvan je weet dat er zes zijvlakken zijn, kun je beredeneren hoeveel hoekpunten ($6\times 4=24$, maar je telt elk hoekpunt in drie zijvlakken, dus $\frac{24}{3}=8$) en hoeveel ribben ($6\times 4=24$, maar je telt ze alle twee keer, dus $\frac{24}{2}=12$) een kubus heeft. De formule van Euler: $H+Z=R+2$ kun je laten zien. Ook bij vormen die je krijgt als je van een kubus stukken afzaagt (kubus met een deuk). Vloeren in een kubuswoning. Maar het mooiste is als je eerst met de klas kubussen gaat vouwen. Daarna kun je er dan mee aan de slag met allerlei interessante vragen. Aan de hand van het boekje *Origami kubussen* [1] gingen de deelnemers vol goede moed aan de slag. Er was keuze uit meer dan achttien verschillende mogelijkheden. Zie Figuur 9. De meeste werden gevouwen uit zes gelijke modules. Op internet vind je de bekendste module, de SONOBE-unit. Het komt er telkens op neer dat je bij het vouwen gleufopeningen creëert waarin later flappen worden gestoken.

Het is ook mogelijk om een kubus uit één vouwblaadje te maken. De bekendste daarvan is de opblaaskubus uit de waterbombasis. In het Chinese vouwboek [6] dat ik op mijn 11de van mijn moeder kreeg toen ik vanwege een hersenschudding twee weken op bed moest blijven, wordt het vouwsel papieren bal genoemd. Als het vouwen klaar is, moet je hem nog opblazen tot de ruimtelijke vorm. Nadeel is dat hij niet echt mooi hoekig en regelmatig is. Zie Figuur 10.

Figuur 9 Kubussen die deelnemers tijdens de workshop gemaakt hebben.

Figuur 10 Opblaaskubus.

Codes, spelletjes en bollenvelden

Na het diner vermaakte James Grime van de University of Cambridge ons met filmpjes van Numberphiles en zijn YouTube-kanaal 'the singing banana'. Met personen uit het publiek voerde hij enkele trucjes uit. Hij vertelde dat Claude Shannon eigenlijk belangrijker was dan Alan Turing, met wie hij in Washington samenwerkte om de Enigma te kraken, voor het ontsleutelen van de berichten van de Duitsers in de Tweede Wereldoorlog. Met de Lorenz-machine werden berichten tussen Hitler en de legertop verzonden. Hij bedacht om met bits te werken. Een voorbeeld: met 'dots en crosses' is ooxxx een M. Versleutel je die met een optelling bij de 'geheime' letter R (oxoxo) door de regels o+o=o, o+x=x, x+o=x en x+x=o, dan wordt het bericht ooxxx+oxoxo=oxxox (letter P). Om deze letter te ontsleutelen gebruik je weer een optelling met de letter R: oxxox+oxoxo=ooxxx. Ziedaar de letter M is terug.

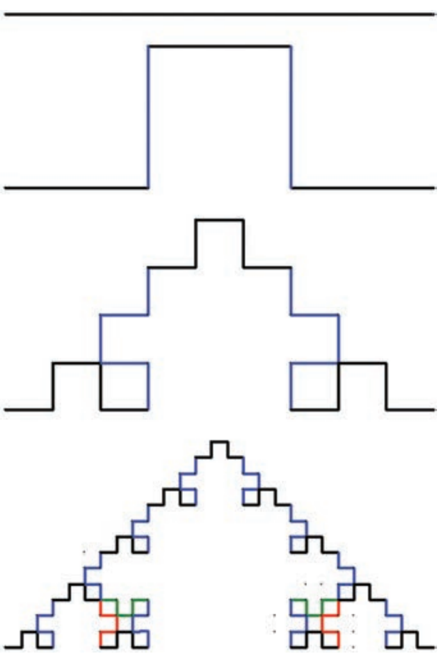
Ook de avond stond bij mij in het teken van de tegels. Op de spellenmarkt heb ik kennis gemaakt met het spel AZUL. Je moet proberen een tegelvloer (van de Portugese koning Manuel I) vol te krijgen met tegeltjes uit de fabrieken. Je kunt strategisch te werk gaan door goed te kijken naar wat andere spelers nodig hebben en wat er in de fabrieken en in de pot ligt. Je moet ook wat geluk hebben om de juiste aantallen van een soort te kunnen scoren. Bij pech gaan er punten van je totaal af. Mijn vrouw en ik spelen vaak spellen in de (winter-) avond. Dit spel is ook zeer geschikt om met z'n tweetjes te spelen. Er zijn inmiddels ook al drie varianten van op de markt. Maar ik ga mezelf eerst maar eens in de basisversie verdiepen. (Jammer was dat je het spel niet direct kon kopen. Ik heb het later in de winkel gekocht.) Daarna nog even de beentjes van de vloer op de muziek van de geweldige band Archie and the Bunkers. Omdat de bar niet in dezelfde ruimte was gezet, was de animo en de sfeer helaas ondermaats. Dat moet volgend jaar weer anders.

De zaterdagochtend begon met een mooie wandeling met collega's langs de bollenvelden en over een iets van het parcours afwijkende route door landgoed Nieuw Leeuwenhorst, behorende tot het Zuid-Hollands Landschap, waartoe ik als donateur en vrijwilliger (al 48 jaar) vrij toegang heb. De eerste hardlopers van de Funrun waren al lang en breed binnen toen wij ook ons zoveelste T-shirt afhaalden.

Fractalen met de klas

Peter Ypma liet in zijn workshop een van zijn leerlingen vertellen hoe zij voor een profielwerkstuk wiskundelessen maakten om uit te leggen hoe je met GeoGebra een fractal kunt laten tekenen. Eerst moet je analyseren welke stap er telkens herhaald wordt. We werden uitgedaagd om zelf bij gegeven voorbeelden de herhaalstap te vinden. Bij de Cantorverzameling wordt in een volgende stap elk bestaand lijnstuk in drie gelijke stukken verdeeld en het middelste deel weggelaten. Bij de sneeuwvlokfractal wordt elk lijntje in drie gelijke stukken verdeeld en wordt op het middelste stukje een gelijkzijdige driehoek gezet, en daarna de basis van de driehoek weggelaten.

Het derde voorbeeld was lastiger omdat daar vierkantjes ontstaan door de extra lijntjes die er per stap bijkomen. Zie Figuur 11. Maar als je goed kijkt dan zie je dat weer elk lijnstukje in drie gelijke stukken wordt verdeeld, op het middelste stuk een vierkantje wordt getekend, en ook daarvan de basis wordt weggelaten. Ik heb de verschillende stappen in kleur getekend. Zo zie je beter hoe het gaat. In feite moet je van elke rij een recursieopdracht opschrijven. Voor Cantor wordt het lijnstuk $[a,b]$ in de volgende stap gereduceerd tot de lijnstukjes $[a,a+\frac{1}{3}(b-a)]$ en $[a+\frac{2}{3}(b-a),b]$, enzovoorts. Daarna liet de leerling zien hoe je bij een vlakvulling met gelijkzijdige driehoekjes een recursie moet maken van de coördinaten van de hoekpunten van de opeenvolgende stappen. Door de juiste driehoekjes zwart te maken, respectievelijk wit te laten, ontstaat de zogenoemde Driehoek van Sierpiński. Naast dit proces krijg je ook te maken met de beperking van tekeningen op de computer omdat de pixels de kleinste eenheden zijn die je kunt tekenen. Het was mooi om te ervaren hoe goed de leerling zijn verhaal kon vertellen. Behalve de wiskundige vaardigheden werd er ook een helder betoog gehouden.



Figuur 11 Fractal.

Rekenwonder en data science

In blok 4 was ik getuige van een show waarin het leven van het joodse rekenwonder Wim Klein voorbij kwam. Theater Adhoc en VLEK lieten deze 'levende computer' tot leven komen, met tekst, muziek en filmpjes. Hij werkte onder andere voor het CERN voordat computers het rekenen gingen overnemen. Hij was een fenomeen en werd Willy Wortel genoemd omdat hij feilloos kon worteltrekken uit grote (meer dan 200 cijfers) getallen. Toch was er ook veel drama in zijn leven. Met gemengde gevoelens verliet ik de zaal.

Margot Gerritsen uit Kloetinge, hoogleraar datawetenschappen, nam ons in de slotlezing van de NWD aan de hand van zeven onderwerpen mee in haar leven als mens in de wetenschap. Ze heeft na haar studie aan de TU Delft over de hele wereld gewerkt. Ze ging telkens nieuwe uitdagingen aan om met Data Science stromingsproblemen te lijf te gaan. Ze stelde dat je qua wiskunde met alleen lineaire algebra kunt volstaan. Ze legde uit hoe je met vectoren met nullen en enen snel het hele web kunt doorzoeken op het item dat je hebt ingetikt. Ze eindigde (en dat doe ik dan ook maar) met een 'Loesje' van Niels Bohr: "Een expert is iemand die alle mogelijke fouten heeft gemaakt die maar gemaakt kunnen worden op een zeer klein gebied."

Referenties

1. Ad van den Broek, *Origami kubussen*, Wageningse Methode, 2019.
2. Marcus Du Sautoy, *Beter Denken*, Nieuwezijds, 2023.
3. Henk Hietbrink, Patroonkunde, blog nvvw.nl, 11 april 2023.
4. Goossen Karssenberg, *Islamitische Meetkundige Patronen*, Zebra-reeks, deel 66, Epsilon Uitgaven, 2023.
5. Maite Karssenberg, *Snijpunt Isfahan*, Querido, 2018.
6. Maying Soong, *Chinees vouwboek*, Van Breda, 1949.