Wim Caspers
Stanislascollege, Delft, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs Bespreking examen vwo wiskunde B 2023

In 1983 liep het anders af dan in 2023

In februari van dit jaar verscheen het rapport *Toetsen getoetst* [2], waarin het niveau van de centrale examens wiskunde B (en wiskunde A en natuurkunde trouwens ook) aan de orde werd gesteld. Er werden examens van vroeger met die van nu vergeleken en er werden vraagtekens gezet bij de hoge gemiddelde score ($7{,}0$) voor het examen wiskunde B in de periode 2015–2021. Het rapport en ook de discussie die na het uitbrengen ervan volgde maakte duidelijk dat het de moeite waard is om het niveau van onderwijs en examens eens goed tegen het licht te houden en ook dat vergelijkingen met vroeger trekken nog niet zo eenvoudig is. Wim Caspers heeft het examen van 1983 er eens bij gepakt en vergeleken met dat van 2023.

Inmiddels zijn we weer een paar examens verder dan waar het rapport *Toetsen getoetst* [2] zich op richtte (het jaar 2022 was nog niet meegenomen in het rapport), en kunnen we het verdere verloop van het gemiddelde cijfer wiskunde B bekijken. Het gemiddelde cijfer in de jaren 2021, 2022 en 2023 kwam op $6{,}7$; $6{,}5$ en $6{,}7$ (door gebruik te maken van de N-termen $1{,}5$; $1{,}8$ en $1{,}9$). Na de coronacrisis is voor het normeren van de centrale examens echter noodgedwongen een andere aanpak dan tot dan toe gebruikelijk gekozen. Voor het berekenen van de N-term maakte de vaststellingscommissie gebruik van het gemiddelde cijfer uit de jaren voor de crisis, de historische N-term, de inschatting van de moeilijkheidsgraad door de docenten en de opmerkingen die docenten en leerlingen meldden over specifieke opdrachten uit het examen.

Cijfermatig blijft het lastig vast te stellen of examens makkelijker zijn geworden dan vroeger en nu misschien weer een beetje moeilijker worden. Gelukkig zijn oude examens goed terug te vinden via de website van Henk Hofstede [1] en als proef op de som vergelijken we het examen van 2023 met dat van 1983.

Tot eind jaren tachtig was het leven overzichtelijk, zo ook de centrale examens wiskunde op het vwo. Niet iedereen had wiskunde in het pakket. De meesten deden wiskunde I en meer was ook niet nodig om toegelaten te worden in het vervolgonderwijs. Wiskunde II kon erbij gekozen worden, maar dat werd nooit populair. Het centrale examen uit 1983 was uitermate voorspelbaar (zie Figuur 1). Zoals ieder jaar was er een opgave waarin een functie onderzocht moest worden (met andere woorden: bepaling van domein, snijpunten met de x-as, afgeleide, extremen en asymptoten) vergezeld van het oplossen van een ongelijkheid of het bepalen van een integraal. Daarnaast steeds een kansberekeningsopgave, een opgave over een kromme en een differentiaalvergelijking. Geen verrassingen en eigenlijk was steeds duidelijk welke aanpak tot een succes zou leiden.

2

1. Gegeven zijn de functies met domein $\mathbb{R}^+$

$$f : x \to \frac{4 \ln^2 x}{x} \quad \text{en} \quad g : x \to \frac{1}{x}.$$

a. Los op $f(x) \geqq g(x)$.
b. Onderzoek de functie f.
Teken de grafieken van f en g ten opzichte van één rechthoekig assenstelsel Oxy.
c. Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafieken van f en g.

2. Een vaas bevat twee gele, drie rode en vijf blauwe knikkers.

a. Men trekt aselect in één greep drie knikkers uit de vaas en legt ze terug in de vaas.
Dit experiment voert men tien maal uit.
Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat er bij deze tien grepen precies vier grepen zijn waarin geen blauwe knikker voorkomt.
b. Men trekt aselect in één greep vier knikkers uit de vaas.
Bereken de kans dat er evenveel gele als rode knikkers in de vaas achterblijven.
c. Men trekt aselect en met terugleggen tien maal een knikker uit de vaas.
Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat er bij deze tien trekkingen precies drie maal een gele en precies drie maal een rode knikker getrokken wordt.

3. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy is gegeven de kromme K met vergelijking $y^2 = \dfrac{-x^2 + 3x}{x + 1}$.

a. Bereken de coördinaten van de punten van K waarin de raaklijn aan K evenwijdig is aan de x-as of aan de y-as.
b. Onderzoek of K een asymptoot heeft.
Teken K voor $x \in [-5, 3]$.
c. Het deel van K waarvoor $x \in [0, 3]$ wordt gewenteld om de x-as.
Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat daardoor ontstaat.

4. V is de verzameling differentieerbare functies f van $\langle 0, \pi \rangle$ naar $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor elke x uit het domein geldt:

$$f'(x) = f(x) + 7 \cos x + \sin x.$$

a. Voor welke $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ geldt: de functie $x \to a \cos x + b \sin x$ is een element van V?
b. De grafiek van een element van V raakt de grafiek van de functie $x \to e^x$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van het raakpunt.
c. De grafiek van een element van V heeft een buigpunt op de lijn $y = 10$.
Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan die grafiek in dit buigpunt.

EINDE

Figuur 1 Examen wiskunde I, eerste tijdvak, 1983.

In 2023 begint het examen ook voorspelbaar met de functie f, die voor $x > 0$ gegeven wordt door

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$

Het minimum mag berekend worden, een scheve asymptoot wordt gezocht, een integraal van a tot $2a$ mag onafhankelijk van a bewezen worden en de inhoud van een omwentelingslichaam moet berekend worden. Al met al niet zo heel veel anders dan opgave 1 uit 1983, afgezien van het feit dat de substitutiemethode nodig was voor de integraal uit 1983 en dat die methode in 2023 niet gekend hoeft te worden. Het omwentelingslichaam zien we terug in 3c uit 1983.

Daarna is het even klaar met de voorspelbaarheid in 2023. Er volgt een verhaal over vrijbuigen van metalen platen, waarbij sprake is van een neutrale lijn. Zie Figuur 2: de lengte PQ gelijk aan de lengte van boog $P'Q'$. De aanpak voor dit vraagstuk is niet zo vanzelfsprekend als voor de opgaven uit 1983. Waar zit er een verband verstopt tussen d en $P'Q'$, is het handig om d uit te drukken in $P'Q'$ of juist andersom, waarom niet d gelijk aan 5 gekozen? Daarna volgt nog invul- en omschrijfwerk van een formule

$$F = \frac{R \cdot d^2}{V} \cdot \left(1 + \frac{4d}{V}\right).$$

Net als in 1983 is er ook in 2023 sprake van een kromme, maar dan beschreven door bewegingsvergelijkingen (zie Figuur 3). De opdracht om te bewijzen dat inderdaad de bewegingsvergelijkingen van Q gegeven worden is voor de kandidaten een standaardopgave, maar dat er in de formule voor de lengte van PQ een absolute waarde opgeschreven kan worden

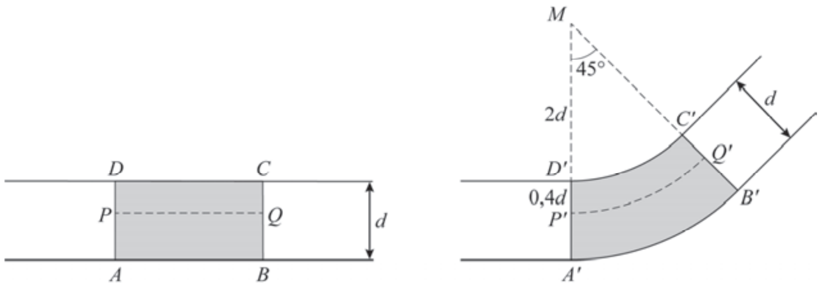
$$L = |t| \cdot \sqrt{2t^2 + 2}$$

is verrassend voor sommigen en de vraag “tot welke waarde de helling van de grafiek van L nadert als t vanaf links tot 0 nadert” zal velen overvallen hebben. Geen gewoonlijk einde van een bewegingsvergelijkingenopdracht.

Kandidaten met een afkeer van de absolute waarde werden in de volgende opdracht niet gespaard (zie Figuur 4). Gelukkig vielen de bijhorende vragen mee. Er werd gevraagd a en b te bepalen in de formule

$$g(x) = a + b \sin(x)$$

en ook om de oppervlakte van het grijze



5p **4** Bereken algebraïsch hoeveel procent de oppervlakte van vlakdeel $A'B'C'D'$ groter is dan de oppervlakte van vlakdeel $ABCD$. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Figuur 2 Figuur 3 uit examen wiskunde B, eerste tijdvak, 2023.

Gedraaide parabool

De bewegingsvergelijkingen van een punt P worden gegeven door:

$$\begin{cases} x_P(t) = 2t \\ y_P(t) = 2t^2 \end{cases}$$

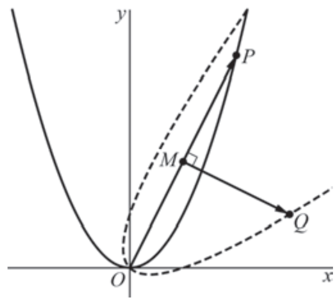
Punt M is het midden van lijnstuk OP. Vector $\overrightarrow{MP}$ wordt rechtsom geroteerd om M over 90°. Zo ontstaat de beeldvector $\overrightarrow{MQ}$.
In figuur 1 is voor een waarde van t de situatie weergegeven.

Tijdens de beweging van P beschrijft ook het punt Q een baan. In figuur 1 is deze baan gestippeld weergegeven.

De bewegingsvergelijkingen van Q worden gegeven door:

$$\begin{cases} x_Q(t) = t + t^2 \\ y_Q(t) = t^2 - t \end{cases}$$

figuur 1



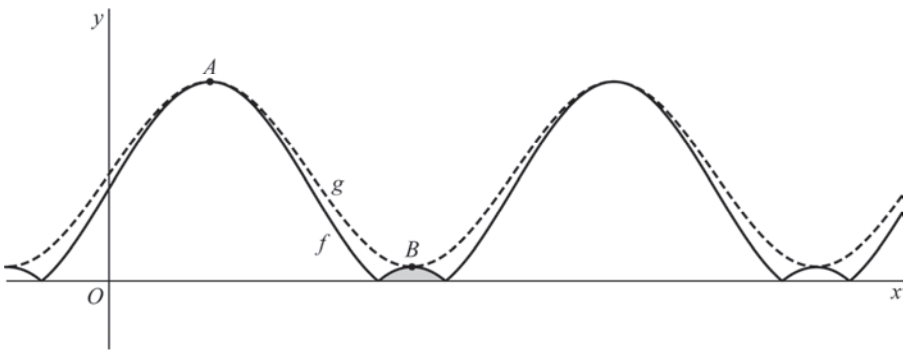
3p **7** Bewijs dat dit inderdaad de bewegingsvergelijkingen van Q zijn.

Figuur 3 Uit de opdracht ‘Gedraaide parabolen’ uit 2023.

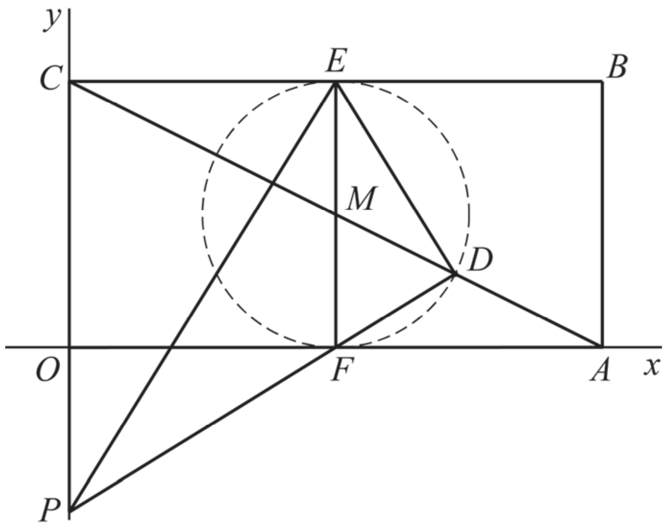
De functie f wordt gegeven door $f(x) = \left|\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right|$.

In de figuur is de grafiek van f als doorgetrokken lijn weergegeven.

figuur



Figuur 4 Uit de opdracht ‘Absolute sinus’ uit 2023.



Figuur 5 Uit de opdracht 'Bissectrice in een rechthoek' uit 2023.

vlakdeel te berekenen. Uitwerkingen liggen redelijk voor de hand, al viel hier en daar het commentaar te horen dat je toch echt wel moest begrijpen wat je aan het doen was. In 1983 kwam je er makkelijker mee weg, als je niet begreep wat je aan het doen was.

De meetkundeopgave vereiste vanwege de veelheid aan mogelijke uitwerkingen ook dat de kandidaten scherp in de gaten hielden waar ze mee bezig waren (zie Figuur 5). De rechthoek is 4 bij 8, de punten E en F zijn middens en de cirkel raakt de boven- en onderkant. Middelpunt $M(4,2)$ is snijpunt van AC en EF. De opdracht is om de y-coördinaat van P te berekenen. (Eerder werd al duidelijk dat de lijn door punten E en F bissectrice is.)

Ook de laatste opgave bevatte een verrassing. Waar in het begin van het examen gevraagd werd om te laten zien dat een integraal van a tot $2a$ onafhankelijk was van a, is de uitkomst van een integraal nu juist wel afhankelijk van a, namelijk $a - \ln(e^a + 1) + \ln(2)$, en de opdracht is te laten zien dat dit voor positieve a kleiner is dan $\ln(2)$. Zijn ze niet gewend, de kandidaten uit 2023.

In 1983 kwam je er makkelijker mee weg, als je niet begreep wat je aan het doen was.

Hoe liep het examen in 1983 af? Na de onvermijdelijke vaas met knikkers draaide een opgave over een differentiaalvergelijking uit op het oplossen van

$$8\cos(x) - 6\sin(x) = 10.$$

Het zou vandaag de dag een verrassing zijn, maar toen bevatten de boekjes rijen met sommetjes waarin dergelijke vergelijkingen werden opgelost, zonder nadenken. Toch is het met sommige kandidaten uit 1983 nog goed afgelopen.

Referenties

1 H. Hofstede, hhofstede.nl, Opgehaald van http://www.hhofstede.nl/opgaven/examens/EXAMENS_OUD.htm, 9 juli 2023.

2 L. Zonnenberg en P. Rutten (2023), *Toetsen getoetst*, McKinsey & Company.