Jan Hogendijk
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
j.p.hogendijk@uu.nl

Jan Hogendijk

Afscheidsrede

Friese wiskunde en het digitale tijdperk: de strijd tussen Pibo Gualtheri en Jan Beerntsen (1612–1613)

Op 7 september 2022 hield Jan Hogendijk, hoogleraar aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht, zijn afscheidscollege. Dit artikel is hierop gebaseerd.

Het onderzoek in de geschiedenis van de Nederlandse wiskunde is door digitalisering veel gemakkelijker geworden. Tussen 1580 en 1850 zijn honderden Nederlandstalige boeken over wiskunde en aanverwante onderwerpen verschenen. Tot voor kort konden deze boeken alleen worden bekeken in gespecialiseerde bibliotheken. Uitlenen was onmogelijk vanwege de hoge ouderdom en de zeldzaamheid. Inmiddels is meer dan 80 procent van deze boeken gedigitaliseerd en gratis toegankelijk. Dat betekent dat iedereen deze oude Nederlandse wiskundeboeken op de eigen laptop kan lezen en downloaden. Alle wiskundeboeken van voor 1700 worden beschreven in de bibliografie van Klaas Hoogendoorn.[1] Digitale versies kunnen gevonden worden door zelf te zoeken op het internet, en in de lijsten op mijn website www.jphogendijk.nl.

Achter veel van deze boeken zit een leuk verhaal. Voor mijn afscheidscollege heb ik een boekje uitgekozen dat te maken heeft met de plaatsen waar ik ben geboren (Leeuwarden) en opgegroeid (Franeker). Het boekje is anderhalve eeuw ouder dan het beroemde planetarium van Eise Eisinga (1774–1781). Het heeft de intrigerende titel:

> *ANTWOORT op de Spits-feninighe selfs niet ghemaeckte voor-reden en Tael Quael Solutie (pag. 16. 17. en 18. gestelt) by eenen IAN BEERNTSEN wtgegeven, over t'Geometrische Vraeghstuck inden Iare 1612. binnen* Leeuwarden *openbaer aengheslaghen.*

Dit betekent in modern Nederlands:

> "Analyse van het venijnige en geplagieerde voorwoord en de oplossing in de huidige (slechte) staat (op p. 16, 17, 18 hieronder uitgelegd) door ene Jan Beerntsen, van het meetkundeprobleem dat in het jaar 1612 in Leeuwarden in het openbaar is opgehangen."

De culturele achtergronden van het boekje zijn onderzocht door Arjen Dijkstra in zijn proefschrift.[2] Wij gaan de wiskundige inhoud bekijken.

De auteur van het boekje was Pibe[3] Wouters, die de Latijnse naam Pibo Gualtheri aannam. Deze kleurrijke figuur werd rond 1580 in Franeker geboren en studeerde de wis- en sterrenkunde bij Adriaan Metius (1571–1635)[4] aan de Franeker universiteit. Na het afronden van zijn studie werkte hij in een hoge functie bij de Friese overheid in Leeuwarden. Hij liet in 1611 een nieuw huis aan de Eewal in Leeuwarden bouwen en leidde daar een luxueus leven. In zijn vrije tijd bleef hij aan wiskunde doen. Zijn vrouw Trijntje overleed in 1618 en doordat hij kort daarna opnieuw wilde trouwen moest er een opsomming worden gemaakt van zijn inboedel.[5] In deze opsomming staan honderden titels van boeken over wiskunde en sterrenkunde die hij had verzameld. Hij had ook sterrenkundige instrumenten[6] en muziekinstrumenten, en hij hield een papegaai, die we verderop in het verhaal zullen tegenkomen.

Er is weinig bekend over het leven van de tweede hoofdpersoon van ons verhaal, Jan Beerntsen.[7] Hij was voor 1615 officieel als landmeter toegelaten in Friesland, maar verdiende de kost als schipper. Hij had niet aan een universiteit gestudeerd en was dus geen academicus.[8] Jan volgde lessen bij Nicolaus Mulerius (1564–1630).[9] Mulerius had in Leiden gestudeerd en werd daarna stadsarts in de Friese havenstad Harlingen (1590–1603). Van 1608–1614 was Mulerius rector van de Latijnse school in

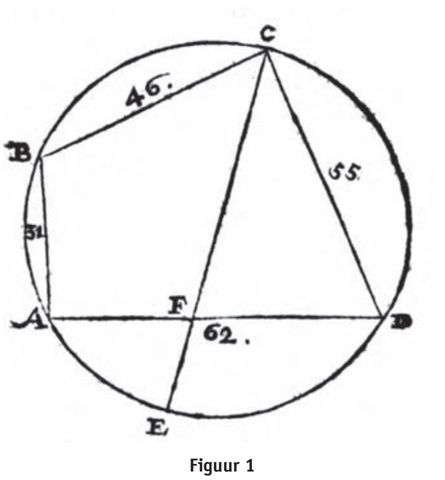
Leeuwarden, daarna werd hij hoogleraar in Groningen. Hij is vooral bekend geworden door zijn uitgave van Copernicus' *De Revolutionibus*.

Pibo en Jan waren in eerste instantie wiskundevrienden. In die tijd was het de gewoonte dat rekenmeesters, landmeters en liefhebbers van wiskunde, al dan niet academisch geschoold, elkaar uitdaagden met problemen, die op een pamflet in het openbaar werden opgehangen. Een eerder meetkundeprobleem van Pibo had al tot ongenoegen tussen de twee geleid. Hier is het probleem dat Pibo in 1612 in sierlijke letters aan de deur van zijn huis in Leeuwarden had opgehangen, samen met Figuur 1:

> D'Linien DF.AF. *van* Diameter *des Circkels uyt C. doorsneden,, snel*
> *Met d'lanckte CF.EF. door d'bekende alhier te produceren,, staen:*
> *Areâ* Quadrilateri *gedeelt met* $\sqrt{11-\sqrt{82\frac{3}{4}}}$. *ghy zult fourneren,, gaen*
> T'getal *des* Iaers. *Laet Konst blijcken door goede Bewijsreden,, wel.*

In modern Nederlands betekent dit: Gegeven een vierhoek $ABCD$ die concyclisch is, dat wil zeggen: ingeschreven in een cirkel. De zijden van de vierhoek zijn bekend, namelijk $31, 46, 55, 62$ als in Figuur 1. De middellijn CE van de cirkel snijdt zijde AD in F. Eerste deel: bereken de lengtes van DF, AF, CF, EF. Tweede deel: bereken de oppervlakte van de vierhoek, deel dit getal door $\sqrt{11-\sqrt{82\frac{3}{4}}}$, en zet het quotiënt om in een datum: het gehele deel is een jaartal, het breukdeel wordt omgezet in maand, dag, uur, enz. Het jaartal moet 1612 zijn. Pibo wilde een beredeneerde oplossing.

Op 16 januari 1613 ontving Pibo Jans oplossing van het probleem uit handen van een gemeenschappelijke vriend. Pibo citeert deze oplossing in zijn boekje, en probeert daarna aan te tonen dat de oplossing waardeloos is en Jan Beerntsen een "driedobbelen konst-verachter ende hater derselvighen".



Figuur 1

Jan begon zijn oplossing met een sarcastisch gedicht van vijftig regels, dat door Pibo in zijn geheel wordt geciteerd. Het gedicht bevat verwijzingen naar de Griekse en Romeinse mythologie, kennelijk om de academische stijl van Pibo te imiteren. Pibo verklaarde dat Jan het gedicht niet zelf heeft geschreven, maar hij kan niet aangeven wie de auteur dan wel geweest was.

In het gedicht zegt Jan dat Pibo's probleem weinig diepgang heeft, en te vergelijken is met een angstaanjagende leeuw op een schilderij:

> *Maer als ick met aandacht t'zelfd' wel ginck overwegen,*
> *Vond' ick t'* Chierliick *gepronckt maer weynich angelegen;*
> *Gelijck* Geschilderd' Leeuw *door gramschap toornich siet,*
> *Seer wijt te gapen schijndt maer ganslick bijttet niet.*

Pibo citeert daarna Jans oplossing van het eerste deel van het probleem. De getallen zijn zo lang dat ze niet horizontaal op de pagina's van het boekje pasten, daarom zijn ze verticaal gedrukt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CF} &= \sqrt{\frac{5436301662402227469352 5}{438666531260402445 00}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{7678439656088843345922438732908842754885919382041996101608881671256590 62500}{2560986470443247532841826573727160935745602974175672175553172787256250000}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{FE} &= \sqrt{\frac{54363016624022274693525}{4386665312604024450 0}} \\
&\quad - \sqrt{\frac{76784396560888433459224387329088427548859193820419961016088816712565906 2500}{2560986470443247532841826573727160935745602974175672175553172787256250000}},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{AF} = 31 - \sqrt{\frac{125780114634036565551521096462356360542599632746906 12500}{58381168562937107897735435985364682093164026475612500}},$$

$$\mathrm{FD} = 31 + \sqrt{\frac{12578011463403656555152109646235636054259963274690612500}{58381168562937107897735435985364682093164026475612500}}.$$

Het is meteen te zien dat de breuken kunnen worden vereenvoudigd door nullen weg te strepen, en door het wegdelen van extra gemeenschappelijke factoren 5. We zullen straks ingaan op de vraag waarom Jan zijn oplossing zo formuleerde. We doen nu eerst een poging om de feitelijke gebeurtenissen na ontvangst van de oplossing te destilleren uit Pibo's woedende tirades.[10]

Op 20 januari 1613 werd een ontmoeting tussen Pibo en Jan georganiseerd in het huis van Mulerius, de leraar van Jan. Er waren ook andere, niet met name genoemde, liefhebbers van wiskunde bij aanwezig. In Pibo's geschrift vinden we een paar citaten uit de verhitte discussie die plaatsvond.

Om te beginnen ergerde Pibo zich aan de manier waarop hij door Jan bejegend werd met *Dat heb ick u noch te segghen Maet*, en *du biste my te rap in die beck*. Jan veronderstelde dat Pibo het jammer vond dat een niet-academicus het probleem had opgelost: *T'is dy leet dat een Schipper ende geen Doctor d'Questie ontbonden heeft*.

Wat de oplossing betreft, verklaarde Jan:

> *met d'bevestinge* lae *ter presentie D[oktor] Muleri[us] als andere Konstlievende persoonen ... , sulcx alles zo wel Theoricè ... als practicè syne ende niemants anders werck te zijn*

Dat kon volgens Pibo niet waar zijn omdat Jan geen bewijzen had gegeven:

> *Alwaar contrarie, een kindt zoude t'mercken, ut syne sotte hiernae ghesettede antwoorden ghebleecke, niet het alderminste bewijs sijns wercx gegeven te hebben, dan seggende metten Pape-gay. Dat heb ick u noch te segghen.*

We gaan nu aan de hand van twee van deze 'sotte antwoorden' het probleem bekijken. Figuur 2 toont de concyclische vierhoek met diagonalen AC en BD die elkaar snijden in G. Jan werkte algebraïsch en stelde $AG = r$, waarbij r de afkorting was van de onbekende wortel (radix) in de cossische algebra, die voorafging aan de algebra van Descartes (1637). Jan gebruikte nu $AG : BG = AD : BC$. Pibo klaagde dat Jan hier geen bewijs voor gaf, maar de verhouding is correct: in de concyclische vierhoek staan gelijke hoeken op gelijke bogen, en daarom zijn de driehoeken AGD en BGC gelijkvormig.

Pibo gaf de rest van de redenering niet weer maar we kunnen nu als volgt verder gaan in moderne notatie. We noteren de gegeven zijden $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Uit $AG = r$ en $AG:BG = AD:BC = d:b$ volgt $BG = \frac{b}{d}r$. Met precies hetzelfde argument vinden we $BG:CG = BA:CD$ en daardoor $CG = \frac{bc}{ad}r$, dus $AC = \frac{ad+bc}{ad}r$. Ten slotte $DG:AG = DC:AB = c:a$, dus $DG = \frac{c}{a}r$ en $BD = \frac{ab+cd}{ad}r$. Hieruit $AC/BD = \frac{ad+bc}{ab+cd}$.

Pibo geeft ook de informatie dat Jan uit het rekenboek van Nicolaus Petri van Deventer (gestorven 1602)[11] de stelling van Ptolemaeus voor concyclische vierhoeken gebruikte: $AC \times BD = ac + bd$. We vermenigvuldigen de twee formules en krijgen $AC^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$, dus is AC bekend. We kunnen nu verder werken in driehoek ACD. Het probleem voor driehoek ACD en de middellijn door C van de omgeschreven cirkel was al opgelost in het hierboven genoemde rekenboek van Nicolaus Petri van Deventer,[12] weliswaar met andere getalswaarden maar met een algemene methode.

We weten niet of Jan op deze manier heeft geredeneerd. In elk geval was Pibo niet overtuigd, en hij vond ook dat men niet zomaar de Stelling van Ptolemaeus mag gebruiken zonder bewijs. Pibo merkte verder op dat Nicolaus Petri de diagonaal van een concyclische vierhoek berekent in een getallenvoorbeeld waarin twee overstaande zijden loodrecht op elkaar staan, en hiervan wordt in de berekening gebruik maakt.[13] Pibo beschuldigde Jan ervan, deze foute aanname gebruikt te hebben. Mulerius en de andere aanwezige wiskundigen waren blijkbaar niet onder de indruk. De discussie keerde zich tegen Pibo en een van de aanwezigen antwoordde op zijn argumenten met: *Iae. is't anders niet?* Ten slotte wilde Pibo Jan een nieuw wiskundeprobleem opgeven dat te maken had met een muziekinstrument en een boek over muziek dat Pibo in zijn verzameling had. Jan en ook Mulerius weigerden dit te accepteren.

Na de mislukte bijeenkomst in huize Mulerius had Pibo volgens eigen zeggen Jan nog een keer uitgenodigd om tegen vergoeding van (reis)kosten de oplossing te komen uitleggen. Jan kwam niet opdagen, maar ging wel door met tegen anderen te zeggen dat hij niets te vrezen had van Pibo. Daarop besloot Pibo dat hij gedwongen was om aan "alle ware Arithmetische ende Geometrische onpartydighe Liefhebberen", en in het bijzonder aan zijn eigen leraar Adriaan Metius, uit te leggen hoe de vork in de steel zat.

Pibo eindigt zijn boekje met de volgende redenering om aan te tonen dat de getallen in Jans oplossing niet correct kunnen zijn. Figuur 3 toont weer de concyclische vierhoek met I het middelpunt van de omgeschreven cirkel, en loodlijnen CH en IK op AD. Lijn $LINM$ evenwijdig aan AD snijdt CH in N. Segmenten AC, AE en ED zijn niet getekend maar worden wel uitgerekend.

Pibo berekende eerst

$$AC = \sqrt{4195\frac{2}{13}},\quad CN = \sqrt{\frac{698659055667}{607409660}},\quad CI = \sqrt{\frac{4634903}{3740}},$$
$$CH = \sqrt{2560\frac{4085}{162409}},\quad ED = \sqrt{1932\frac{108}{935}}.$$

Deze lengtes zijn correct.

Omdat $CN:CI = CH:CF$ en CN, CI, CH vierkantswortels zijn, volgt $CF = \sqrt{-}$ (Pibo gebruikt een liggend streepje onder een wortelteken om een rationaal getal aan te geven dat hij niet uitrekent.) Omdat $AC:CF = ED:DF$ geldt ook $DF = \sqrt{-}$, en op soortgelijke manier leidt Pibo af $AF = \sqrt{-}$, $EF = \sqrt{-}$.

Pibo concludeert dat niet kan gelden wat Jan zegt in zijn oplossingen, namelijk

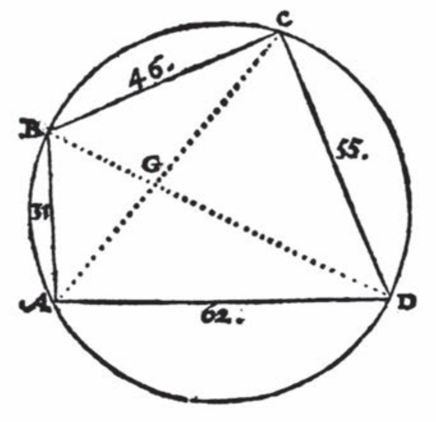
$$AF = 31 - \sqrt{-},\quad DF = 31 + \sqrt{-},\quad CF = \sqrt{-} + \sqrt{-},\quad EF = \sqrt{-} - \sqrt{-}.$$

Tot zover Pibo.

We zullen nu Jans oplossing gaan analyseren met moderne digitale methoden, die geen wiskundige voorkennis vereisen. Het is voldoende om de breuken zonder typefouten in te voeren in het vakje op het beginscherm van wolframalpha.com, en op de enter-toets te drukken: het programma vereenvoudigt dan direct. Bij de lengtes van AF en DF zien we zo:

$$\frac{125780114634036565551521096462356360542599632746906 12500}{583811685629371078977354359853646820931640264756 12500} = \frac{5017452161089}{232886351889}.$$

Als we het woord `factorize` intypen en daarachter de gemeenschappelijke factor van teller en noemer $25068522946661626770009193883579269301 2500$ vinden we $2^2 \times 3^3 \times 5^5 \times 7^4 \times 11^5 \times 13^{10} \times 17 \times 31^{10}$, dus een product van kleine priemfactoren.



Figuur 2

Door de teller en de noemer van de vereenvoudigde breuk ook te factoriseren vinden we dat beide kwadraten zijn:

$$\sqrt{5017452161089} = 2239967$$

en

$$\sqrt{232886351889} = 482583.$$

En zo vinden we dat

$$AF = 31 - \tfrac{2239967}{482583} \quad\text{en}\quad FD = 31 + \tfrac{2239967}{482583},$$

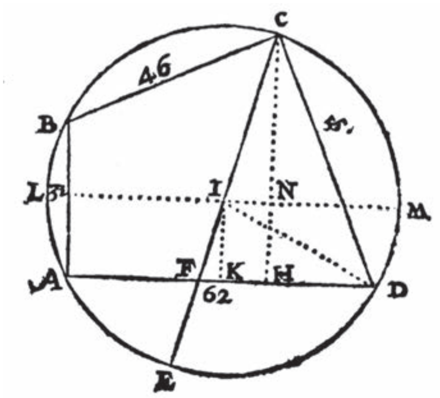
beide rationale getallen.

Op dezelfde manier kunnen de lengtes CF en FE in Jans oplossing vereenvoudigd worden tot

$$\sqrt{\frac{4634903}{3740}} \pm \sqrt{\frac{2611447693335 24167}{870994956064860}}.$$

De gemeenschappelijke factoren in de oorspronkelijke breuken onder het wortelteken zijn $3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2 \times 13^4 \times 31^4$ en $2^2 \times 3^4 \times 5^7 \times 7^6 \times 11^7 \times 13^{14} \times 17 \times 31^{14}$, alweer producten van kleine priemgetallen.

Met behulp van moderne notatie (ingevoerd door Descartes in 1637) is nu gemakkelijk te controleren dat Jans oplossing correct is. We noteren $p = AC$, $x = AF$, $y = FD$, $R = \frac{1}{2}CE$ de straal van de omgeschreven



Figuur 3

cirkel, en K de oppervlakte van de concyclische vierhoek. Dan is

$$p^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

zoals we hierboven hebben gezien,

$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

met

$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c+d)$$

(Brahmagupta's formule) en

$$R^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16K^2}.$$

Door geschikte gelijkvormige driehoeken te bekijken vinden we

$$\frac{x}{y} = \frac{p^2}{c^2} \cdot \frac{c^2+d^2-p^2}{c^2+p^2-d^2}.$$

Hieruit blijkt dat als a, b, c en d rationale getallen zijn, de lengtes AF en FD ook rationaal zijn.

Als $a=31$, $b=46$, $c=55$, $d=62$, zoals in Pibo's probleem, dan vinden we

$$s=97, \quad K^2=4948020, \quad R^2=\tfrac{4634903}{3740},$$

$$p^2=\tfrac{54537}{13}, \quad \frac{x}{y}=\tfrac{205163}{277420}, \quad x+y=62,$$

$$x = AF = 31 - \tfrac{2239967}{482583}$$

en

$$y = FD = 31 + \tfrac{2239967}{482583}.$$

Stel $CF = R+z$, voor zekere nog uit te rekenen z, dan is $FE = R-z$. Er geldt dan

$$\begin{aligned} R^2 - z^2 &= CF \cdot FE = AF \cdot FD \\ &= 31^2 - \left(\tfrac{2239967}{482583}\right)^2 \end{aligned}$$

en hieruit

$$z^2 = \frac{2611447693335241167}{870994956064860}.$$

We concluderen dat Jans oplossing correct is. Dit kan onmogelijk het resultaat zijn van toeval. Het betekent dat Jan een correcte methode bezat voor het berekenen van de diagonalen van de concyclische vierhoek, vermoedelijk in de trant van wat wij hierboven uit zijn 'sotte antwoorden' hebben gereconstrueerd. Jan heeft Pibo op het verkeerde been gezet door de breuk in AF en FD te kwadrateren en er vervolgens de wortel uit te trekken. Daarna heeft hij de tellers en noemers van alle breuken herhaaldelijk met kleine priemfactoren vermenigvuldigd. Pibo heeft de enorme getallen correct weergegeven, en de drukker heeft ze zonder drukfouten gezet. Jan had niet de methode van Nicolaus Petri gebruikt voor de berekening van de diagonaal van een concyclische vierhoek, maar Pibo kon dit niet weten doordat hij Jans oplossing niet had kunnen controleren.

De competitie tussen Pibo en Jan heeft te maken met verschillende stijlen van wiskundebeoefening in het begin van de zeventiende eeuw. Enerzijds waren er academisch geschoolde wiskundigen die zich sterk op de klassieke oudheid richtten, en wiskunde wilden baseren op de *Elementen* van Euclides. Pibo behoorde tot deze groep.

Anderzijds waren er rekenmeesters die algebra gebruikten, en ook meetkundige figuren en redeneringen, maar geen bewijzen in de stijl van Euclides. Tot deze groep behoorden Nicolaus Petri en ook Jan Beerntsen. Deze wiskundigen waren niet academisch geschoold en kenden meestal geen Latijn.

We kunnen het verschil uitleggen aan de hand van een concyclische vierhoek. Het is intuïtief duidelijk dat er voor elk viertal gegeven lijnsegmenten, zodat het grootste lijnsegment kleiner is dan de som van de drie andere, een concyclische vierhoek bestaat met vier zijden gelijk aan die vier lijnsegmenten. Voor wiskundigen uit de tweede groep was dit genoeg. Wiskundigen uit de eerste groep zouden een euclidische constructie met passer en liniaal willen zien, zoals die gegeven werd door F. Vieta in 1595.[14] Pibo had gevraagd waarom Jan er zeker van was dat de concyclische vierhoek met zijden met lengtes 31, 46, 55 en 62 in de probleemstelling wel bestond, waarop Jan alleen antwoordde *Daeromme*.

De oplossing van Jan is een uitdaging door een niet academisch gevormde rekenmeester aan een academische volgeling van Euclides. De getallen in de oplossing waren te groot om door Pibo en zijn academische collega's te kunnen worden gefactoriseerd, en daarom kon met de standaard methoden van de *Elementen* van Euclides niet worden vastgesteld of de oplossing correct was. Hierdoor werd het twijfelachtig of de methoden van Euclides wel de basis kunnen zijn van alle wiskunde.

Met moderne digitale methoden heeft het boekje van Pibo nu een onbedoeld effect gehad dat Pibo nooit had kunnen voorzien. Vier eeuwen later is de oplossing van Jan Beerntsen in ere hersteld.

Noten en referenties

1 Klaas Hoogendoorn, *Bibliography of the Exact Sciences in the Low Countries from ca. 1470 to the Golden Age (ca. 1700)*, Leiden, 2018, voor Pibo Gualtheri zie p. 446.

2 Arjen Dijkstra, *Between Academics and Idiots: A Cultural History of Mathematics in the Dutch Province of Friesland (1600–1700)*, Leeuwarden, 2012, pp. 49–51, 101–106.

3 Andere schrijfwijzen van zijn voornaam zijn Pybe, Pijbe.

4 Zie Arjen Dijkstra, Goffe Jensma, Djoeke van Netten en Piter van Tuinen, *Wiskunde als Familiebedrijf: Menelaus Winsemius' lijkrede op Adriaan Metius (1571–1635)*, Groningen, 2012.

5 De lijst is bewaard in het Historisch Centrum Leeuwarden (inv. nr. 3370), online beschikbaar via www.allefriezen.nl, door te zoeken met Inventarisatieboek 1618–1620. De papegaai staat in het origineel op pagina 41. Pibo's boekenlijst is getranscribeerd door M. H. H. Engels https://www.mpaginae.nl/At/PiboG.htm (geraadpleegd 7 februari 2023).

6 Pibo maakte zelf ook instrumenten: een prachtig astrolabium uit 1606 wordt in Leeuwarden bewaard.

7 Andere spellingen van zijn naam zijn Beernts, Barents.

8 Behalve de wiskunde in Pibo's boekje is één meetkundig probleem van Jan Beerntsen bekend: no. 25 uit de lijst van meetkundige problemen aan het eind van Theodorus Hoen, *Natuerlycke Astrologie*, p. 216, 'van Jan Barents Lantmeeter tot Harlingen'. In hetzelfde boek staat ook een probleem van Pibo, zie p. 206.

9 Over Mulerius zie Djoeke van Netten, *Nicolaus Mulerius (1564–1630), Een geleerde uit Groningen in de discussies van zijn tijd,* Groningen, 2010.

10 Zie voor deze tirades ook de getypte versie van het boekje, beschikbaar op http://www.jphogendijk.nl/sources/pibo.html.

11 Claes Pietersz van Deventer, *Practique om te Leeren Rekenen cijpheren ende Boeckhouwen / met die Regel Coss ende Geometrie seer profijtelijcken voor allen Coopluyden. Van nieus Ghecorrigeert ende vermeerdert*, vele drukken, bijvoorbeeld Haarlem, 1596. De stelling van Ptolemaus wordt in deze druk genoemd in probleem no. 94, fol. 227b.

12 Probleem no. 85, fol. 222a.

13 De zijden AB en CD staan loodrecht op elkaar wanneer $(ab+cd)^2+(ad+bc)^2=(d^2-b^2)^2$. Dit is het geval in het voorbeeld van Nicolaus Petri, $a=6\frac{2}{5}$, $b=10$, $c=13\frac{1}{5}$, $d=24$. In het voorbeeld van Pibo is er geen loodrechte stand van tegenoverstaande zijden.

14 F. Vieta, *Pseudo-Mesolabum et alia quaedam adiuncta capitula*, Parijs, 1595, herdruk in F. van Schooten, ed., Francisci Vietae Opera Mathematica, Leiden, 1646, pp. 275–283, reprint Olms, Hildesheim–New York, 1970. Ludolph van Ceulen gaat hierop verder in het begin van Boek 5 van zijn *Arithmetische en Geometrische Fondamenten, Leiden 1615*.