Jan Draisma
Faculteit Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven, en
Afdeling Wiskunde, FEW, Vrije Universiteit Amsterdam
j.draisma@tue.nl

De oplossing

Het chromatisch polynoom

Op een conferentie in juni 2015 ter ere van Bernard Teissiers 70ste verjaardag kondigde de jonge wiskundige June Huh uit Princeton de oplossing aan, samen met Karim Adiprasito (Hebrew University Jerusalem) en Eric Katz (University of Waterloo), van een vermoeden uit begin jaren zeventig over het chromatisch polynoom van een matroïde. Eric Katz sprak al in 2012 op de *Third Workshop on Graphs and Matroids* in Maastricht over een speciaal geval. Jan Draisma neemt een kijkje in de geschiedenis en oplossing van dat vermoeden — met al eerder een hoofdrol voor June Huh.

Chromatische polynomen van grafen

In zijn onderzoek naar het vierkleurenvermoeden introduceerde George Birkhoff het *chromatisch polynoom* $\chi_G(q)$ van een eindige graaf G [2] (ongericht, lussen en dubbele kanten zijn toegestaan): $\chi_G(q)$ is het aantal kleuringen van de knopen van G met (hooguit) de kleuren $1,\ldots,q$ die aan de eindpunten van elke kant e van G twee *verschillende* kleuren toekennen. Deze functie blijkt inderdaad een polynoom in q, en het inductieve bewijs van die uitspraak is instructief voor wat komen gaat. Ten eerste, als G geen kanten heeft en n knopen, dan zijn alle kleuringen toegestaan en geldt dus $\chi_G(q)=q^n$. Als G een lus e heeft, dan kan geen enkele kleuring de eindpunten van e — die immers samenvallen — verschillende kleuren geven, dus is $\chi_G(q)$ het nulpolynoom. Neem ten slotte aan dat G een kant e heeft die geen lus is. Definieer $G\backslash e$ als de graaf verkregen uit G door kant e weg te laten, en G/e als de graaf verkregen uit G door de kant e samen te trekken (zie Figuur 1). Bij dat samentrekken worden de eindpunten van e dus geïdentificeerd, en kunnen er lussen ontstaan als G kanten parallel aan e heeft. Maar hoe dan ook hebben $G\backslash e$ en G/e allebei een kant minder dan G, en er geldt

$$\chi_G(q)=\chi_{G\backslash e}(q)-\chi_{G/e}(q).$$

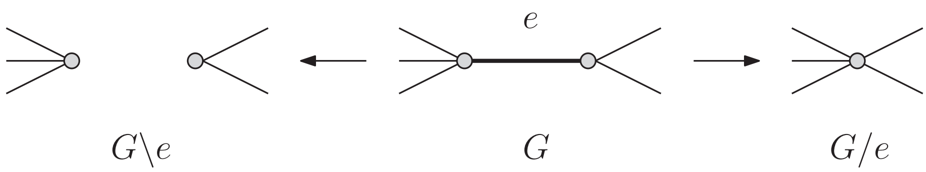
De toegestane kleuringen van $G\backslash e$ die *niet* toegestaan zijn voor G zijn precies die waarbij de eindpunten van e dezelfde kleur krijgen, en die corresponderen met kleuringen van G/e. Beide termen zijn polynomen, dus $\chi_G(q)$ ook.

Uit de definitie blijkt dat $\chi_G(q)$ multiplicatief is: als GH de disjuncte vereniging van twee grafen G en H is, dan geldt $\chi_{GH}(q)=\chi_G(q)\chi_H(q)$. Verder verandert het chromatisch polynoom niet als je meerdere kanten tussen dezelfde twee knopen door een enkele kant vervangt. Een paar voorbeelden, met K_n de complete graaf op n knopen, P_n het pad met n knopen en C_n de cykel met n knopen:

$$\begin{aligned}
\chi_{K_1}(q)&=q,\\
\chi_{K_2}(q)&=q^2-q,\\
\chi_{P_3}(q)&=\chi_{K_1K_2}-\chi_{K_2}=q^3-2q^2+q,\\
\chi_{K_3}(q)&=\chi_{P_3}-\chi_{K_2}=q^3-3q^2+2q,\\
\chi_{P_4}(q)&=\chi_{K_1P_3}-\chi_{P_3}=q^4-3q^3+3q^2-q,\\
\chi_{C_4}(q)&=\chi_{P_4}-\chi_{K_3}=q^4-4q^3+6q^2-3q.
\end{aligned}$$

Een aantal eigenschappen van $\chi_G(q)$ is makkelijk af te leiden: als G geen lussen heeft, dan is $\chi_G(q)$ een monisch polynoom van graad n, het aantal knopen van G. De coëfficiënten zijn daarna afwisselend strikt negatief en strikt positief, tot de eerste nul-coëfficiënt, waarna *alle* coëfficiënten nul zijn. De maximale l met $q^l\mid\chi_G(q)$ is gelijk aan het aantal samenhangscomponenten van G.

Maar een veel diepere eigenschap, voor het eerst experimenteel opgemerkt door



Figuur 1

Ronald Read [6], is dat de coëfficiënten van $\chi_G(q)$ in absolute waarde *unimodaal* lijken: als $\chi_G(q) = c_0 q^n + c_1 q^{n-1} + \cdots + c_n$, dan lijkt er altijd een k te zijn zo dat

$$|c_0| \leq |c_1| \leq \cdots \leq |c_k| \geq |c_{k+1}| \geq \cdots \geq |c_n|.$$

Later ontdekte Dominic Welsh een ander patroon, namelijk, dat voor alle $i = 1, \ldots, n-1$ de ongelijkheid

$$|c_i|^2 \geq |c_{i-1}| \cdot |c_{i+1}|$$

lijkt te gelden. Deze ongelijkheid impliceert, waar de coëfficiënten niet nul zijn, dat de logaritmen van hun absolute waarden een concave rij vormen; en dit impliceert de unimodaliteit die Read opmerkte. Welsh formuleerde deze *logaritmische concaafheid* van het chromatisch polynoom als vermoeden in [9], waar hij het ook uitbreidde naar zogenaamde *matroïden*. Naar de *unimodaliteit* vroegen, in deze algemene context, al eerder A.P. Heron [3] en (tussen de regels door) Gian-Carlo Rota [7].

June Huh

Chromatische polynomen van matroïden

Een *lineaire* matroïde over een lichaam K is een drietal $M = (E, V, \varphi)$ waarbij E een eindige verzameling is, V een eindig-dimensionale vectorruimte over K, en φ een willekeurige afbeelding $E \to V$. Bij een element $e \in E$ kunnen we uit M twee nieuwe lineaire matroïden construeren, als volgt. Ten eerste kunnen we e verwijderen, en dan krijgen we $M \backslash e := (E \backslash \{e\}, V, \varphi|_{E \backslash \{e\}})$. Of we kunnen e samentrekken, wat per definitie $M/e := (E \backslash \{e\}, V/\langle \varphi(e) \rangle, \overline{\varphi})$ geeft, met $\overline{\varphi} : E \backslash \{e\} \to V/\langle \varphi(e) \rangle$ de samenstelling van de restrictie $\varphi|_{E \backslash \{e\}}$ en de projectie $V \to V/\langle \varphi(e) \rangle$. Merk op dat bij samentrekken de dimensie van de vectorruimte met één omlaag gaat, tenzij $\varphi(e)$ nul is. Voor een lineaire matroïde $M = (E, V, \varphi)$ met $n \dim := V$ definiëren we het *chromatisch polynoom* $\chi_M(q)$ door

$$\chi_M = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} q^{n - \dim \langle \varphi(e) \,|\, e \in S \rangle}.$$

Een eenvoudige rekenpartij leidt tot de volgende identiteit:

$$\chi_M(q) = \chi_{M \backslash e}(q) - \chi_{M/e}(q).$$

De analogie met grafen gaat verder, want lineaire matroïden (over een willekeurig lichaam K) zijn een veralgemening van grafen: bij een graaf G met knopenverzameling X en kantenverzameling E, hoort een matroïde $M_G := (E, KX, \varphi)$ waarbij $V := KX$ de vectorruimte van formele K-lineaire combinaties van X is, en φ aan een kant tussen x en y het element $x - y \in KX$ toekent. Als x en y verschillend zijn, dan moet hier een teken gekozen worden, maar die keuze beïnvloedt het chromatisch polynoom niet. Er gelden nu de volgende identiteiten voor een willekeurige kant e van G:

$$M_{G \backslash e} = M_G \backslash e \quad \text{en} \quad M_{G/e} = M_G / e.$$

Daaruit volgt, met inductie, dat $\chi_{M_G}(q) = \chi_G(q)$.

Een *algemene* matroïde is een paar $M = (E, \mathcal{I})$ met E een eindige deelverzameling en $\mathcal{I}$ een collectie deelverzamelingen van E, die we *onafhankelijk* noemen, waarbij $\mathcal{I}$ voldoet aan de volgende axioma's: als $S \in \mathcal{I}$ en $T \subseteq S$, dan $T \in \mathcal{I}$; en als $S, T \in \mathcal{I}$ met $|S| < |T|$, dan is er een $x \in T \backslash S$ zo dat $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Uit een lineaire matroïde (E, V, φ) krijgen we een matroïde door voor $\mathcal{I}$ de verzameling van alle deelverzamelingen $S \subseteq E$ te nemen waarvoor $\varphi(S)$ onafhankelijk is. Als we dit doen voor de lineaire matroïde M_G, dan zijn de onafhankelijke verzamelingen precies de deelverzamelingen van E die geen cykel bevatten — *de grafische matroïde* van G.

Merk op dat we bij de overgang van (E, V, φ) naar $\mathcal{I}$ informatie verliezen over wat het lichaam K is en hoe de vectoren $\varphi(e)$ in de ruimte V liggen; in het algemeen kan een matroïde dan ook meerdere, onderling niet isomorfe, realisaties als lineaire matroïde hebben. Omgekeerd zijn er ook matroïden die helemaal geen lineaire realisaties hebben — het wordt zelfs vermoed dat de lineair realiseerbaar matroïden een voor $|E| \to \infty$ naar nul convergerende fractie van alle matroïden vormen.

In een algemene matroïde definiëren we de *rang* $r(S)$ van een deelverzameling $S \subseteq E$ als de maximale kardinaliteit $|T|$ van een deelverzameling $T \subseteq S$ die bovendien in $\mathcal{I}$ zit. Verder heet $d := r(E)$ de rang van M. Nu heeft ook M een chromatisch polynoom gedefinieerd door

$$\chi_M(q) = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} q^{d-r(S)}.$$

Als M van een lineaire matroïde (E, V, φ) afkomt, dan is dit hetzelfde chromatisch polynoom als voorheen, behalve dat $n = \dim V$ groter zou kunnen zijn dan $\dim \langle \varphi(E) \rangle = d$. Dus om ze echt aan elkaar gelijk te krijgen, moet ons laatste chromatisch polynoom nog met q^{n-d} vermenigvuldigd worden. Het vermoeden van Heron–Rota–Welsh luidt nu:

Vermoeden. *Als* $c_0 q^d + c_1 q^{d-1} + \dots + c_d$ *het chromatisch polynoom van een algemene matroïde is, dan geldt voor alle* $i = 1, \dots, d-1$ *de ongelijkheid* $|c_i|^2 \geq |c_{i-1}||c_{i+1}|$.

Huhs eerste artikel

Als beginnende promovendus in Michigan bewees Huh de volgende stelling [4], die zoals we gezien hebben het vermoeden van Read impliceert.

Stelling. *Het Heron–Rota–Welsh-vermoeden is waar voor lineaire matroïden over een lichaam van karakteristiek nul.*

In zijn voordracht merkt Huh droogjes op dat hij destijds heel veel geluk had: hij had één wiskundig artikel gelezen, namelijk van Bernard Teissier [8], waarin een ongelijkheid van de vorm

$$|\mu_i|^2 \leq |\mu_{i-1}||\mu_{i+1}|$$

voor zogenaamde *gemengde multipliciteiten* voorkwam; en hij kende één interessant open probleem, namelijk het vermoeden van Rota. Hij vergat voor het gemak dat beide ongelijkheden verschillende kanten op gaan, en dacht erover om Teissiers resultaat toe te passen op Rota's vermoeden. En inderdaad bleek er bij nadere beschouwing een 'globale' variant van Teissiers stelling te zijn, met de ongelijkheid in de juiste richting, die van toepassing was.

Een eerste, eenvoudige stap is dat het lichaam zonder verlies van algemeenheid $\mathbb{C}$ is: om $\varphi : E \to K^n$ te beschrijven zijn maar eindig veel getallen in K nodig, en elke eindig voortgebrachte lichaamsuitbreiding van $\mathbb{Q}$ is in te bedden in $\mathbb{C}$. De stelling die Huh nu toepaste behelst irreducibele algebraïsche deelvariëteiten X van een product $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ van complexe projectieve ruimtes. Neem aan dat X dimensie d heeft, en construeer bij X als volgt een rijtje getallen $m_0, m_1, \dots$, de *multi-graad* van X geheten: neem een voldoende algemene lineaire deelruimte $L \subseteq \mathbb{P}^m$ van dimensie i en een voldoende algemene lineaire deelruimte $L' \subseteq \mathbb{P}^n$ van dimensie $m+n-d-i$. (Als $i > m$ of $m+n-d-i < 0$ of $m+n-d-i > n$, dan is $m_i = 0$.) Nu heeft het product $L \times L'$ dimensie $m+n-d$, precies de codimensie van X. Omdat L, L' algemeen genoeg zijn, snijdt dat product X in een eindig aantal punten. Noem dat aantal m_i — het hangt, weer vanwege de algemene ligging van L en L', niet van die twee ruimtes af. Nu geldt de volgende stelling van Khovanskii en Teissier; zie bijvoorbeeld [5, Example 1.6.4] voor een algemenere bewering.

Stelling. *Als* $X \subseteq \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ *een irreducibele deelvariëteit is, dan geldt voor alle* $i \geq 1$*de ongelijkheid* $m_i^2 \geq m_{i-1} m_{i+1}$.

Uit een lineaire matroïde $M = (E, V, \varphi)$ over $\mathbb{C}$ met $n = \dim V$ construeert Huh een irreducibele, $(n-1)$-dimensionale deelvariëteit X van het product $\mathbb{P}V^* \times \mathbb{P}V$, met V^* de duale ruimte van V: zij h de functie $V^* \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $h(x) := \prod_{e \in E} x(\varphi(e))$. Dit is een homogene polynomiale functie op V^* van graad $|E|$. In elk punt $x \in V^*$ is de afgeleide $d_x h$ een lineaire afbeelding $V^* \to \mathbb{C}$, dus een element van V. De afbeelding $\nabla h : V^* \to V$, $(\nabla h)(x) := d_x h$ de gradiënt van h, is een homogene polynomiale afbeelding van graad $|E| - 1$. Als zodanig definieert ∇h een rationale afbeelding $\mathbb{P}V^* \dashrightarrow \mathbb{P}V$.

Stelling. *Zij* $\Gamma_h \subseteq \mathbb{P}V^* \times \mathbb{P}V$ *de afsluiting van de grafiek van de rationale functie* ∇h*, en zij* $m_0, \dots, m_{n-1}$ *de multigraad van de irreducibele variëteit* Γ_h*. Dan geldt* $\chi_M(q) = (q-1)(m_0 q^{n-1} - m_1 q^{m-2} + \dots + (-1)^{n-1} m_{n-1} q^0)$.

In het bewijs van deze stelling gebruikt Huh topologische argumenten, en dus dat we over $\mathbb{C}$ werken. Uit de log-concaafheid van $m_0, \dots, m_{n-1}$ volgt nu, met behulp van deze stelling, eenvoudig de log-concaafheid van de coëfficiënten van $\chi_M(q)$.

Voorbeeld. Neem $V = \mathbb{C}^3$ en identificeer V^* met $\mathbb{C}^3$ via de gewone symmetrische bilineaire vorm. Neem $E = \{1, 2, 3\}$ en $\varphi(i) = e_i$. Dan is h het polynoom xyz, en de gradiënt als rationale afbeelding is $(\nabla h)(x : y : z) = (yz : xz : xy)$. Om m_0 van Γ_h uit te rekenen, snijden we de tweedimensionale variëteit $\Gamma_h \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ met een tweedimensionaal oppervlak van de vorm $\{(r : s : t)\} \times \mathbb{P}^2$. Voor $(r : s : t)$ algemeen genoeg is het enige punt in de doorsnede $((r : s : t), (st : rt : rs))$, dus $m_0 = 1$. Om m_1 uit te rekenen, snijden we Γ_h met het product

Foto: Archives of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Karim Adiprasito

van twee lijnen, zeg met vergelijkingen $L: ax+by+cz=0$ en $L': a'x+b'y+c'z=0$, respectievelijk. De doorsnede is dan de oplossingsverzameling van de vergelijkingen

$$ax+by+cz=0$$

en

$$a'yz+b'xz+c'xy=0.$$

Een doorsnede dus van een lijn met een kegelsnede, bestaande uit $m_1=2$ punten. Tenslotte is m_2, de doorsnede van Γ_h met $\mathbb{P}^2$ maal een punt, niets anders dan de graad van de rationale afbeelding ∇h. Die blijkt gelijk aan 1. De stelling zegt dus dat

$$\chi_M(q) = (q-1)(q^2-2q+1) = q^3-3q^2+3q-1.$$

De matroïde M is in dit geval isomorf met de lineaire matroïde M_{P_4} behorende bij het pad P_4, behalve dat in die matroïde de omhullende vectorruimte 4-dimensionaal is. En inderdaad, we vinden

$$q\chi_M(q) = \chi_{P_4}(q).$$

Adiprasito–Huh–Katz' resultaat

"Mooi," aldus Huh, "daarmee had ik dus het vermoeden van Rota voor (waarschijnlijk) nul procent van alle matroïden bewezen." Overigens was dit resultaat, en het onderzoek dat eraan voorafging onder aanmoediging van de Japanse wiskundige Heisuke Hironaka, een keerpunt in Huhs loopbaan. Na een studie wiskunde probeerde Huh aanvankelijk van zijn gedichten te leven, maar dat lukte nauwelijks. Toen hij besloot om dan maar wetenschapsjournalist te worden, kwam hij in contact met Hironaka, die hem het oude werk van Teissier te lezen gaf. "Achteraf ben ik heel blij dat ik mijn gedichten niet gepubliceerd kreeg", zegt Huh als ik hem later spreek.

Eric Katz

In samenwerking met Katz bewees Huh een generalisatie naar lineaire matroïden in positieve karakteristiek [4] — nog steeds nul procent. Dus gingen Adiprasito, Huh en Katz op zoek naar de dieperliggende oorzaken voor de ongelijkheid uit de stelling van Khovanskii–Teissier over multigraden. In het geval dat X een glad oppervlak is, is die ongelijkheid een gevolg van de klassieke indexstelling van Hodge. En ook in hoger-dimensionale gevallen volgt die ongelijkheid uit het definiet zijn van (een bepaalde restrictie van) een intersectie-paring op de cohomologiering van X. In hun nieuwste werk definiëren ze daarom, uitgaande van een algemene matroïde, een commutatieve algebra die zich gedraagt als de cohomologiering van een variëteit, maar nu van dimensie gelijk aan d, de rang van de matroïde. Daarvoor bewijzen ze analoga van de *Hard Lefschetz Theorem* en de stelling van *Riemann–Hodge*, op puur combinatorische wijze, waarvan de log-concaafheid een gevolg is. Dat doen ze door die stellingen eerst te bewijzen voor heel specifieke matroïden: de uniforme matroïde van rang d op N elementen, waarin elke deelverzameling ter grootte d onafhankelijk is. Vervolgens tonen ze aan dat die stellingen bewaard blijven onder zogenaamde *flips* waarmee vanuit de uniforme matroïde alle matroïden van rang d op N elementen kunnen worden bereikt.

Een belangrijke subtiliteit is dat door die flips onderweg de verzameling van matroïden *verlaten* wordt, en dat de cohomologieringen dan horen bij d-dimensionale *tropische variëteiten* die niet afkomstig zijn van d-dimensionale klassieke variëteiten. Het nieuwe bewijs, met de omweg langs puur tropische objecten, is prachtige reclame voor de tropische meetkunde, een gebied waarover ik later in het NAW hoop te berichten. Het artikel van Adiprasito–Huh–Katz is net uit [9], en slides van Huhs uitstekende voordracht zijn te vinden op: https://indico.math.cnrs.fr/event/202/speakers.

'De oplossing' is een rubriek over onlangs opgeloste vermoedens in de wiskunde die een raakvlak hebben met de Nederlandse wiskundepraktijk. Is er in uw onderzoeksgebied een belangrijke doorbraak te melden? Laat het ons weten: redactie@nieuwarchief.nl.

Referenties

1 Karim Adiprasito, June Huh en Eric Katz, Hodge theory for combinatorial geometries, preprint, arXiv:1511.02888.

2 George D. Birkhoff, A determinant formula for the number of ways of coloring a map, *Ann. Math. (2)* 14 (1912), 42–46.

3 A.P. Heron, Matroid polynomials, in D.J.A. Welsh en D.R. Woodall, red., *Combinatorics*, Institute of Mathematics and its Applications, Southend-on-Sea, 1972, pp. 164–202.

4 June Huh, Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs, *J. Am. Math. Soc.* 25(3) (2012), 907–927.

5 Robert Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry I: Classical setting: Line bundles and linear series*, Springer, Berlin, 2004.

6 Ronald C. Read, An introduction to chromatic polynomials, *J. Comb. Theory* 4 (1967), 52–71.

7 Gian-Carlo Rota, Combinatorial theory, old and new, in *Actes Congr. internat. Math. 1970*, Vol. 3, 1971, pp. 229–233.

8 Bernard Teissier, Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney, *Astérisque* 7-8 (1974), 285–362.

9 Dominic J.A. Welsh, *Matroid Theory*, L.M.S. Monographs, Vol. 8, Academic Press, 1976.